

1. a) Arătați că dacă A, B, C, D sunt numere complexe și $A^3 - A = B^3 - B = C^3 - C = D^3 - D$, atunci două dintre acestea sunt egale.

b) Este adevărată afirmația similară pentru A, B, C, D – matrice din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$? (Justificați !)

Soluție. a) Dacă $A \neq B, C, D$, atunci $A^2 - AB + B^2 - 1 = 0$ și analoagele.

2p

Rezultă că B, C, D sunt soluții ale ecuației $z^2 - Az + A^2 - 1 = 0$; cum ecuația are două soluții, cel puțin două dintre numerele B, C, D trebuie să fie egale. **2p**

b) Este suficient să luăm A, B, C, D distincte astfel încât $A^2 = B^2 = C^2 = D^2 = I_2$, **3p**

de exemplu matrice de forma $\begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1+a & -a \end{pmatrix}$. **2p**

2. Fie $(x_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere pozitive cu proprietatea că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ dat de $a_n = \frac{x_{n+1}}{1+x_n}$ are limită, egală cu l .

a) Determinați x_n în cazul când $x_1 = \frac{1}{2}$ și $a_n = \frac{1}{2}$ pentru orice $n \geq 1$.

b) Arătați că, dacă $l \geq 1$, atunci șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ are limita $+\infty$.

c) Arătați că, dacă $l < 1$, atunci șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent.

Soluție. Avem $x_{n+1} = a_n + a_n x_n$, de unde

$$x_{n+1} = a_n + a_n a_{n-1} + a_n a_{n-1} a_{n-2} + \dots + a_n a_{n-1} \dots a_1 + a_n a_{n-1} \dots a_1 x_1.$$

a) $x_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$. **3p**

b) Fie $b < 1$. Există atunci $m \in \mathbb{N}$ astfel încât $a_p > b$ pentru $p \geq m$. Astfel, pentru $n \geq m$ obținem $x_{n+1} \geq a_n + a_n a_{n-1} + \dots + a_n a_{n-1} \dots a_m > b + b^2 + \dots + b^{n-m+1} = \frac{b}{1-b} - \frac{b^{n-m+2}}{1-b}$. Cum $\lim_{d \rightarrow \infty} \frac{b^{d+2}}{1-b} = 0$, există $m' \in \mathbb{N}$ astfel încât $\frac{b^{d+2}}{1-b} < 1$ pentru $d > m'$. Fie acum $M > 0$. Alegând $b = \frac{M+1}{M+2} < 1$ avem $\frac{b}{1-b} = M+1$, deci $x_n > M$ pentru $n \geq m + m' - 1$, ceea ce arată că $x_n \rightarrow +\infty$. **4p**

Observație Pentru un raționament care funcționează doar în cazul $l > 1$ se acordă **2p**

c) Arătăm că $x_n \rightarrow \frac{l}{1-l}$. Fie $M, N > 0$ astfel încât $M < \frac{l}{1-l} < N$. Ca mai sus, există $m \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n > M$ pentru $n \geq m$.

Arătăm acum că există m' astfel încât $x_n < N$ pentru $n \geq m'$. Pentru $l < a < 1$ există $m'' \in \mathbb{N}$ astfel încât $a_n < a$ pentru $n \geq m''$. Atunci $x_n < a + a^2 + \dots + a^{n-m''} + a^{n-m''}k$, unde k este o constantă care depinde doar de $x_1, a_1, a_2, \dots, a_{m''-1}$. Cum $\lim_{n \rightarrow \infty} (a + a^2 + \dots + a^{n-m''} + ka^{n-m''}) = \frac{a}{1-a}$, dacă luăm $\frac{l}{1-l} < \frac{a}{1-a} < N$, i.e. $l < a < \frac{1}{N+1}$, obținem că există $m' \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n < N$ pentru $n \geq m'$. **2p.**